10/09/17

Θέματα επιχειρησιακών ερευνών

Ακέραιος Προγραμματισμός

(γραμμική συνάρτηση με γραμμικούς περιορ.)

$$\max \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

(μεταβλητές ίσως όλες ακέραιες)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \;, \quad i=1,\dots n$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,\dots n$$

x_j ακέραιοι για κάποια ή για όλα τα $j=1,\dots n$

Υποθέτουμε ότι c_j^* απόδοση από την j επένδυση *

a_{ij} η ποσότητα του πόρου i (χρήματα, εργασία, κ.λ.π) που απαιτούνται στην j επένδυση.

Π.χ. $x_j \in \{0, 1\}$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow (\text{Αν } x_j \text{ πάρει τιμή } 1, \text{ τότε } \max = 1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

Επένδυση στη γραμμή παραγωγής i προϋποθέτει την κατασκευή των εργοστασίων j

$$x_i \leq x_j$$

Αν $x_i = 1$ τότε αναγκαστικά $x_j = 1$ αφού $\{0, 1\}$

Αν $x_j = 0$ τότε -"- $x_i = 0$ -"- -"-

(περισσότερους από 1 περιορισμούς)

□

Π.Χ. 2 (1 περιοριστικός)
Πρόβλημα σακιδίου

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$ (κάθε αντικείμενο σου δίνει χρησιμότητα c_j)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$ (ανάλογα το βάρος τόσο μπορεί να πάρει)

$$x_j \in \{0,1\}$$

□

Π.Χ. 3

Εργο	Δαπάνες (εκ/έτος) 1	2	3	Απόδοση (εκ)
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	50
Διαθ Ποσοτ	25	25	25	

Μοντελοποίηση

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν επιλεγεί το έργο} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\max \; 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$$

$$x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25$$

$$8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25$$

Θα $0 \le x_i \le 1$ είχαμε:
$x_1 = 0{,}5789$
$x_2 = x_3 = x_4 = 1$
$x_5 = 0{,}7568$
$z = 108{,}68$

(Αν κάναμε $x_1 = x_5 = 1$ τότε θα βλέπαμε ότι παραβιάζονται οι περιορισμοί)

Μορφή περιορισμών - τρόπος μοντελοποίησης

1) Είτε $2x_1 + x_2 \le 5$ είτε $2x_3 - x_4 \le 2$, x_i ακέραιοι.

$$2x_1 + x_2 \le 5 + My_1 \quad (1)$$
$$2x_3 - x_4 \le 2 + M(1 - y_1) \quad (2)$$
$$y_1 \in \{0,1\}$$

(Αν $y_1 = 0$ τότε ισχύει (1) ή (2) ανάλογα το M
Αν $y_1 = 1$ — " — " — (2) ή (1) — " — " —)

2) Αν $2x_1 + x_2 \le 5$ τότε $2x_3 - x_4 \le 2$
είτε $2x_1 + x_2 \ge 6$ είτε $2x_3 - x_4 \le 2$
είτε $-2x_1 - x_2 \ge -6$ είτε $2x_3 - x_4 \le 2$
Έτσι,

$$-2x_1 - x_2 \ge -6 + My$$
$$2x_3 - x_4 - x_4 \le 2 + M(1 - y)$$
$$y \in \{0,1\}$$

3) Να ισχύουν k από τους m περιορισμούς

$$f_1(x_1, \dots x_n) \le b_1$$
$$f_2(x_1, \dots, x_n) \le b_2$$
$$\dots$$
$$f_m(x_1, \dots, x_n) \le b_m$$

$$f_1(x_1, \dots x_n) \le b_1 + My_1$$
$$f_2(x_1, \dots x_n) \le b_2 + My_2$$
$$\dots$$
$$f_m(x_1, \dots x_n) \le b_m + My_m$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = m - k.$$

Π.Χ. Θέλω να ισχύουν ακριβώς 2 από τους εξής τρεις

$x_1+4x_2+2x_4 \le 7$
$3x_1-5x_2 \le 12$
$-2x_2+x_3 \le 6$

$x_1+4x_2+2x_4 \le 7+My_1$
$3x_1+-5x_2 \le 12+My_2$
$-2x_2+x_3 \le 6+My_3$

$y_1+y_2+y_3=1$

Θέλω να ισχύουν τουλάχιστον 2
Τότε $y_1+y_2+y_3 \le 1$. (Αν $y_1=y_2=0$ ισχύει ο 3, κ.τ.π.)

Επιπλέον, σταθερό κόστος κάθε φορά που παράγω

$$c_i(x_i)=\begin{cases} k_i + c_i x_i, & x_i>0 \\ 0, & x_i=0 \end{cases}$$

$c_i x_i$ → κόστος ανά μονάδα, $x_i>0$ προϊόντος

min $\sum c_i x_i + k_i y_i$
$x_i \le M y_i$

Παράδειγμα

	1 χρυσό	2 ασήμι	3 χαλκό	Διαθέσιμ
χρόνος εργασίας (ώρες)	2	4	5	100
μόλυβι (κιλά)	1	1	1	30
πολύτιμοι λίθοι (gr)	10	5	2	204
κέρδος	52	30	20	
Επιπλέον κόστος εκκίνησης	500	400	300	

x_i ποσότητα προϊόντος i που παράγει $i=1,2,3$
→ θα εμφανιστεί αν x_i παράγεται ≥ 1 και $\omega_1=1$

$-500+52x_1 \quad x_1 \ge 1$
$-400+30x_2 \quad x_2 \ge 1$
$-300+20x_2 \quad x_3 \ge 1$

(Θέλω να το μεταφέρω σε αντικειμ. συνάρτηση)

ορίζω $\omega_i=\begin{cases}1, & \text{αν } x_i \ge 1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

$x_1 \le M w_1$
$x_2 \le M w_2$
$x_3 \le M w_3$

$x_i \geq 0$ ακέραιοι
$w_i \in \{0,1\}$

↳ (ούτε πολύ μικρή γιατί θα πετάξουμε λύσεις ούτε πολύ μεγάλη)

x_1 παίρνει μέγιστη τιμή όταν $x_2 = x_3 = 0$ οπότε για να την βρούμε την τιμή αυτή από τους περιορισμούς έχουμε:

Από 1ον $\frac{100}{2}$, 2ον $\frac{30}{1}$, 3ον $\frac{204}{10}$

άρα $x_1 = \max\left\{\frac{100}{2}, \frac{30}{1}, \frac{204}{10}\right\}$

Χωροθέτηση Αποθηκών

m αποθήκες
n πελάτες
d_i ζήτηση των πελατών i

(Από ποιες συνθήκες και σε πόση ποσότητα για να ικανοποιήσει τους πελάτες)

→ χωρίς το f_i έχουμε πρόβλημα μεταφοράς

f_i σταθερό κόστος χρήσης της αποθήκης j

c_{ij} το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς του προϊόντος από την αποθήκη i στον πελάτη j

ορίζω x_{ij} η ποσότητα που μεταφέρεται από την αποθήκη i στον πελάτη j.

$i = 1, \dots m$
$j = 1, \dots n$

$y_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η αποθήκη } i \text{ χρησιμοποιηθεί} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i$$

→ απαιτήσεις: όλες οι αποθήκες καλύπτουν τις ανάγκες του j πελάτη

κάθε πελάτης να ικανοποιεί την ζήτησή του

$\sum x_{ij} = d_j$, $j = 1, \dots n$ → (η ζήτηση του j πελάτη πρέπει να ικανοποιηθεί)

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le y_i \left(\sum_{i=1}^{n} d_j\right)$ → (αν όλη η ζήτηση καλυφθεί από 1 αποθήκη)

$y_i \in \{0,1\}$, $x_{ij} \geq 0$

↓ πρ που μπορούν να σταλούν από μια αποθ εφόσον χρησιμοποι.

Συλλογές-Διαμερίσεις

Ελάχιστη κάλυψη του συνόλου

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Παίρνω συλλογή υποσυνόλων

$L = \{ \overset{1}{(1,2)}, \overset{2}{(1,3,5)}, \overset{3}{(2,4,5)}, \overset{4}{(3)}, \overset{5}{(1)}, \overset{6}{(4,5)} \}$

Πως μπορώ να καλύψω το S με το λιγότερο κόστος

ορίζω

Set covering problem

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το } i \text{ μέλος του } L \text{ ανήκει στο κάλυμμα του } S \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\min \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_5 \geq 1$$

$$\delta_1 + \delta_3 \geq 1$$

$$\delta_2 + \delta_4 \geq 1$$

$$\delta_3 + \delta_6 \geq 1$$

$$\delta_2 + \delta_3 + \delta_6 \geq 1$$

Κάλυψη περιβλήματος

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$L = \{(1,2,5), (1,3), (2,4), (3,6), (2,3,6)\}$

ορίζω $\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το } i \text{ μέλος ανήκει στο περίβλημα του } S \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$\max \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5$$

$$\delta_1 + \delta_2 \leq 1$$

$$\delta_1 + \delta_3 + \delta_5 \leq 1$$

$$\delta_2 + \delta_4 + \delta_5 \leq 1$$

$$\delta_3 \leq 1$$

$$\delta_1 \leq 1$$

$$\delta_4 + \delta_5 \leq 1$$

χωρίς επικάλυψη δηλαδή, δεν τα θέλω να καλύψουν όλα ταυτόχρονα

partitioning problem

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$L = \{(1,2), (1,3,5), (2,4,5), (3), (1), (4,5)\}$

$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \text{ μέλος του } L \text{ χρησιμοποιείται} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Θέλω να τα καλύψω ταυτόχρονα, χωρίς επικάλυψη

$\min \ \delta_1 + \dots + \delta_6$

$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_5 = 1$

$\delta_1 + \delta_3 = 1$

$\delta_2 + \delta_4 = 1$

$\delta_3 + \delta_6 = 1$

$\delta_2 + \delta_3 + \delta_6 = 1$

Αυστηρή κορυφή των 3 παραπάνω

packing, covering, partitioning problem

$S_1, S_2, \dots S_n \quad S_i \subseteq \{1, 2, \dots m\} \quad i = 1, \dots m$

σε κάθε σύνολο $\exists$ ένα κόστος | κέρδος c_i

Έστω $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in S_j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$, $x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } S_j \text{ επιλεγεί} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

packing

$\max \sum c_j x_j$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1$

$i = 1, \dots m$

covering

$\min \sum c_j x_j$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1$

$i = 1, \dots m$

partitioning

$\min \sum c_j x_j$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1$

$j = 1, \dots m$

Παράδειγμα

(αεροπορική εταιρεία)

Θέλει να προγραμματίσει πλήρωμα με διαδρομές c_j κόστος εκχώρησης πληρώματος στη διαδρομή j

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν ένα πλήρωμα εκχωρηθεί στη διαδρομή } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

πάμε στο covering

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν το τμήμα } i \text{ περιλαμβάν στη διαδρ } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Θέλαμε να είναι πάνω πάμε στο partitioning

$$\min \sum c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1$$

! $x = \{4, 8, 13\}$

$$x = 4\omega_1 + 8\omega_2 + 13\omega_3$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$$

για να πάρω 4 ή 8 ή 13 για $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ κ.λ.π.

αν $x = \{0, 4, 8, 13\}$

$$x = 4\omega_1 + 8\omega_2 + 13\omega_3$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \leq 1$$

Να είναι και τα τρία μηδέν

□

Εφαρμογή

Πρέπει να επισκεφθεί κάθε πόλη ακριβώς 1 φορά, c_{ij} κόστος μετάβασης από την πόλη i στην πόλη j

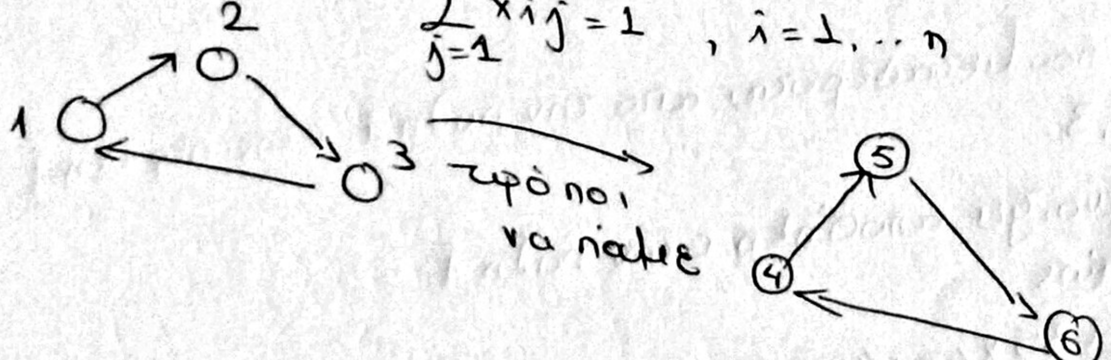
$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν πάει από την πόλη } i \text{ στην πόλη } j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

διαδρομές / κατευθύνσεις

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , j = 1, \dots n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , i = 1, \dots n$$



Λογικοί περιορισμοί

Πίνακας έκφρασης αυτών

Αν το i επιλεγεί τότε το j θα επιλεγεί επίσης, $x_i \le x_j$

Είτε το i θα επιλεγεί, είτε το j θα επιλεγεί επίσης $x_i \le x_j$

Είτε το i -"- είτε το j είτε και τα 2 $x_i + x_j \geq 1$

Είτε το i -"- είτε το j θα επιλεγεί όχι και τα 2 $x_i + x_j = 1$

αν το i δεν επιλεγεί τότε το j δεν επιλέγεται , $x_j \le x_i$

αν το πολύ 1 επιλεγεί από τα i, j, k . $x_i + x_j + x_k \le 1$

(τα βρίσκουμε από το αν-τότε) ακριβώς 1 (= 1)

τουλάχιστον 1 (≥ 1)

Φυλλάδιο

Άσκηση 1

x_{ij} η ποσότητα που μεταφέρεται από την πόλη i στην περιοχή j

$i = 1, \ldots 4$, $j = 1, 2, 3$

$y_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ανοίγει αποθήκη στην πόλη } i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$\min\ 20x_{11} + \ldots + 35x_{43} + 400y_1 + 500y_2 + 300y_3 + 150y_4$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 80$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 70$

στέλνει $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 40$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 100y_1$ → πρέπει να ανοίγει για να στείλει

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 100y_2$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 100y_3$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} \le 100y_4$

$y_1 \le y_2$ αν αποθ Ν.Υ → ανοίγει L.A.

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 2$ (το πολύ 2 μπορούν να ανοίγουν)

$y_2 + y_4 \geq 1$ (είτε, είτε)

Π